Analiza funkcjonalna
Lista 2 (przestrzenie unormowane)

Zad 1. Wykazać, że przestrzenie $B(\Omega)$, dla dowolnego zbioru Ω, $BC(\Omega)$, gdy Ω jest przestrzenią topologiczną, oraz $C(\Omega)$, gdy Ω jest przestrzenią zwarta, wraz z funkcją określoną wzorem $\|x\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |x(t)|$ są przestrzeniami Banacha.

Zad 2. Pokazać, że przestrzeniami Banacha są przestrzenie ℓ_∞, c oraz c_0 wraz z funkcją $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$.

Zad 3. Pokazać, że dla $p \in [1, \infty)$ przestrzeń ℓ_p wraz z funkcją $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p)^{\frac{1}{p}}$ jest przestrzenią unormowaną.

Zad 4. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenia z miarą. Uzasadnić, że dla $p \in [1, \infty]$ przestrzeń ilorazowa

$$L_p(\Omega, \Sigma, \mu) := \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)/\mathcal{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu),$$

gdzie $\mathcal{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu) := \{x : \Omega \to \mathbb{K} : x \text{ funkcja mierzalna i } \int_\Omega |x|\, d\mu = 0\}$, wraz z funkcją

$$\|[x]\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |x|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{gdy } p < \infty, \\ \sup\operatorname{ess}_{t\in\Omega} |x(t)| & \text{gdy } p = \infty, \end{cases}$$

gdzie $[x] = x + \mathcal{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$,[1] jest przestrzenią unormowaną.

Zad 5. Wyznaczyć odległość wektorów x, y w przestrzeni X:

N	X	x	y	N	X	x	y
a)	c	$x(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$	$(1, 0, 0, ...)$	e)	$C([-1, 1])$	$x(t) = 1 - t$	$y(t) = 1 + t$
b)	ℓ_1	$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ...)$	$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ...)$	f)	$C([0, 1])$	$x(t) = \sqrt{t}$	$y(t) = 1 + t$
c)	c_0	$x(n) = \frac{n}{n^2+1}$	$y(n) = \frac{1}{n^2+1}$	g)	$L_2([0, 1])$	$x(t) = t$	$y(t) = t^2$
d)	$\ell_{\frac{3}{2}}$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, ...)$	$(0, 0, ...)$	h)	$L_1([-\pi, \pi])$	$x(t) = 1$	$y(t) = \sin t$

Zad 6. Sprawdzić, które spośród funkcji $N : X \to \mathbb{R}$ są normami w przestrzeni X:

	X	$N(x)$		X	$N(x)$
a)	ℓ_∞	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x(n)\|}{2^n}$	e)	$C([-1, 1])$	$\int_0^1 \|x(t)\|dt$
b)	ℓ_1	$\|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\|$	f)	$C([0, 1])$	$\int_0^1 \|x(t)\|dt$
c)	ℓ_1	$\sup_{n\geq 2} \|x(n)\| + \|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\|$	g)	$C([0, 1])$	$(\int_0^1 \|x(t)\|^{\frac{1}{2}}\, dt)^2$
d)	ℓ_π	$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{m} x(n)\|$	h)	$C^{(1)}([a, b])$	$\|\int_a^b x(t)dt\| + (\int_a^b \|x'(t)\|^2\, dt)^{\frac{1}{2}}$

Zad 7. Pokazać, że przestrzenie $(C^{(1)}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ oraz $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$, gdzie $\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ oraz $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt$ są przestrzeniami unormowanymi, nie będącymi przestrzeniami Banacha.

Zad 8. W przestrzeni $C[a, b]$ określone są dwie normy $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$ oraz $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt$. Czy normy te są równoważne?

Zad 9. Pokazać, że następujace funkcje

$$N_1(x) = \max\left\{\max_{t\in[0,1]} |x(t)|, \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|\right\}, \qquad N_2(x) = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|,$$

$$N_3(x) = |x(0)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|, \qquad N_4(x) = \int_0^1 |x(t)|dt + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|,$$

są parami równoważnymi normami w przestrzeni $C^{(1)}([0, 1])$.

[1] używając skrótu myślowego zwyczajowo pisze się (nieściśle) $[x] = x$